V Predavanje

Definicija dužine i metra i metode mjerenja dužina. Direktno mjerenje dužina. Optičko mjerenje dužina. Elektromegnetno mjerenje dužina. Određivanje dužina i uglova iz pomoćnog trougla – triangulacija. Računanje dužine iz koordinata tačaka.

5.1 Definicija dužine i metra

Dužina predstavlja jednu od osnovnih veličina SI sistema. To je veličina koja materijalizuje rastojanje između dvije tačke u prostoru ili put koji između njih treba preći pri pravolinijskom kretanju.

Uobičajeni znak za dužinu je „*l*“ a mjerna jedinica metar.

Ideja o zakonitom uvođenju metra kao jedinice za dužinu potekla je 1790. godine od strane komisije koju je formirala nacionalna skupština Francuske. 1791. godine usvojen je prijedlog komisije i ozakonila se jedinica dužine metar koji je bio jednak četrdeset milionitom dijelu meridijana koji je prolazio kroz parisku opservatoriju. Konvencija o metru (Ugovor o metru) iz 1875. godine je obavezala stvaranje stalnog Međunarodnog biroa za težine i mjere u Sevru u Francuskoj. Ova organizacija je napravila novu prototip šipku 1889. godine uspostavljajući tako Međunarodni prototip metra kao razdaljinu između dve linije na standardnoj šipci od legure sačinjene od 90% platine i 10% iridijuma 1893. Godine.

Sedamnaesta Generalna konferencija težina i mjera 1983. je zamijenila definiciju metra sa sadašnjom, i tako popravila dužinu metra u vezi sa vremenom i brzinom svjetlosti: „Metar je dužina putanje koju u vakuumu pređe svjetlost za vrijeme od 1/(299 792 458) sekundi“.

Kod mjerenja prostornih dimenzija tijela, naziv „dužina“ se koristi samo za jednu osu pravouglog koordinatnog sistema, dok se za ostale dvije koriste nazivi visina (h) i širina (b). Ostale mjere za dužinu su: kilometar (1 km=1000 m), decimetar (1dm=0,1 m), centimetar (1 cm=0,01m), milimetar (1 mm=0,001 m) i mikrometar (1 µm=0,000001 m).

Stare mjere za dužinu su: col (2,62 cm), palac (0,0254 m), stopa (0.3048 m – 12 cola), lakat (71.118 cm), jard (0,944 m), hvat (1,8965 m) itd.

Prilikom mjerenja dužine može se dobiti samo približno tačna vrijednost, te ukoliko je razlika između stvarne i izmjerene dužine manja to je mjera bliža stvarnoj. Da bi se greške pri mjerenju svele na minimum, mjera dužine se dijeli na svoje manje djelove (decimetar, centimetar, milimetar...) pa se njima izražava izmjerena dužina. Teorijski, moglo bi se ići do beskonačno dugog decimalnog broja, ali to u praksi nije moguće.

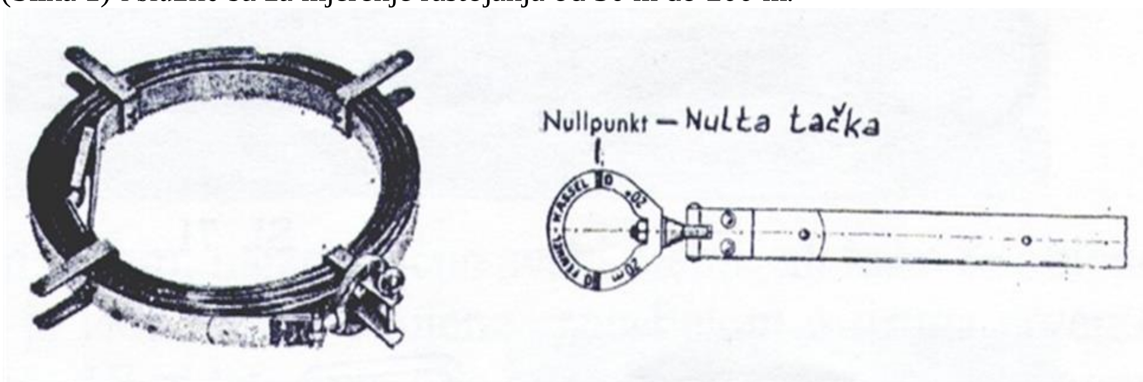
Mjerenje dužina može biti:

- Direktno;
- Indirektno;
  - Optičko;
  - Elektromagnetno;
  - Iz pomoćnog trougla – triangulacija.

5.2 Direktno mjerenje dužina

Mjerenje dužina, odnosno rastojanja između tačaka na terenu, do prije nekoliko desetina godina, izvodilo se isključivo ovim putem i to trakama od metala, koje su su se zvale pantljike.

Pantljike su u početku izrađivane od metala širine najčešće 1.5 cm, debljine 2 mm i dužine od 20 m do 50 m. Pantljike dužine od 25 m do 50 m zvale su se poljske pantljike (Slika 1) i služile su za mjerenje rastojanja od 30 m do 200 m.



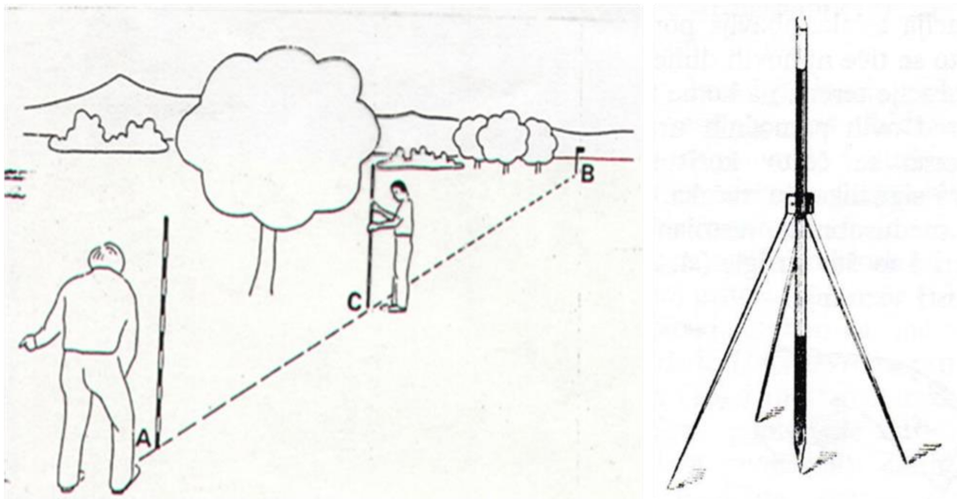
Slika 1. Poljska pantljika

Pantljike dužine 10 m, 20 m i 25 m zvale su se ručne pantljike i obično su se namotavale na valjak koji se vrti rukom, pa otuda i naziv ručna pantljika. Sa njom su se mjerila rastojanja do 30 m. Imajući u vidu činjenicu da su pantljike bile izrađene od neke metalne legure, zbog upotrebe na terenu po rosi i kiši, pantljike su poslije kraće upotrebe korodirale i bez obzira što su se poslije upotrebe obavezno sušile i podmazivale, poslije nekog vremena postajale su neupotrebljive. Da bi se izbjegla korozija, pantljike su presvlačene providnom plastikom a kasnije su kompletno izrađivane od plastike (slika u sredini i desno).

Slika 2. Ručne pantljike

Postupak mjerenja pantljikama ima sledeći redoslijed:

Krajnje tačke se signališu značkama. Pantljika se pruža po pravcu duži koja treba da se izmjeri. Za postavljanje pantljike u pravac, koristi se treća značka (Slika 3). Pantljika se zategne duž pravca tako da se kraj pantljike poklopi sa početnom tačkom. Drugi kraj pantljike se obilježi na zemlji.



Slika 3. Mjerenje dužine pantljikom

Sledeći korak je povlačenje pantljike i mjerenje od obilježenog kraja prve dužine pantljike prema drugom kraju mjerene duži.

Nakon izmjerenog punog broja dužina pantljike, broj pantljika se pomnoži sa nominalnom dužinom pantljike i na tu dužinu se doda ostatak koji se mjeri od obilježenog kraja poslednje cijele pantljike do druge krajnje tačke mjerene duži.

Kontrolno mjerenje se sprovodi ponovnim mjerenjem duži sa drugog kraja.

Pri mjerenju dužina pantljikom moguće su bile greške zbog:

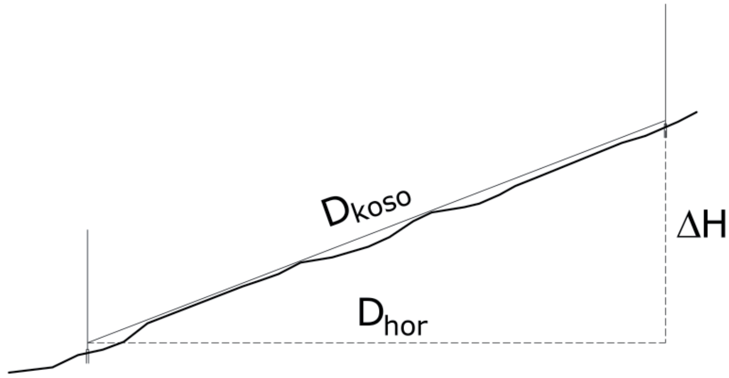
- Dužine pantljike;
- Redukcije;
- Aliniranja;
- Temperature;
- Fiksiranja kraja pantljike;
- ...

Kao što je već rečeno, analizom raznih izvora grešaka bavi se geodetska metrologija.

Invarske žice predstavljaju instrument za mjerenje dužina osnovica u trigonometrijskoj mreži koja čini osnovu za sve naučno istraživačke i praktične potrebe iz oblasti geodezije. Ova strana trougla se zove “baza” i od nje je razvijan veliki broj trouglova, koji je pokrivao pojedine regione u kojima su se dužine određivale indirektno. Tjemena trouglova su materijalizovana i određivane su im koordinate, tako da je čitav prostor prekriven tačkama (trigonometrijske tačke) sa poznatim koordinatama. Ova mreža trouglova u literaturi i praksi zove se trigonometrijska mreža i ona će detaljnije biti opisana u nekom od narednih predavanja.

Ovo je bila najprecizniji način mjerenja dužina u geodeziji u to vrijeme. Tačnost koja se postizala prilikom mjerenja invarskim žicama bila je 1 : 1 000 000, odnosno greška mjerenja je bila 1 mm na 1 km. Dobile su ime po leguri – invar (64% gvožđa i 34% nikla). Legura je dobila naziv invar po francuskom izrazu za naziv nepromjenljiv, a značaj legure invara je u tome što ona ima veoma mali temperaturni koeficijent, pri čemu su dužine žica pri različitim temperaturama postojane.

Mjerenje dužina pantljikom, vrši se koso po terenu. S obzirom da je D_{hor} - horizontalno rastojanje, ΔH - vertikalno rastojanje (horizontala i vertikala zaklapaju prav ugao), uz D_{koso} –koso rastojene, dobija se pravougli trougao.



Slika 4. Mjerenje dužine pantljikom, koso po terenu – prikaz u vertikalnoj ravni

Primjenom Pitagorine teoreme iz datog trougla se dobija:

$$D_{koso}^2 = D_{hor}^2 + \Delta H^2$$

Tako da se horizontalna dužina može sračunati kao:

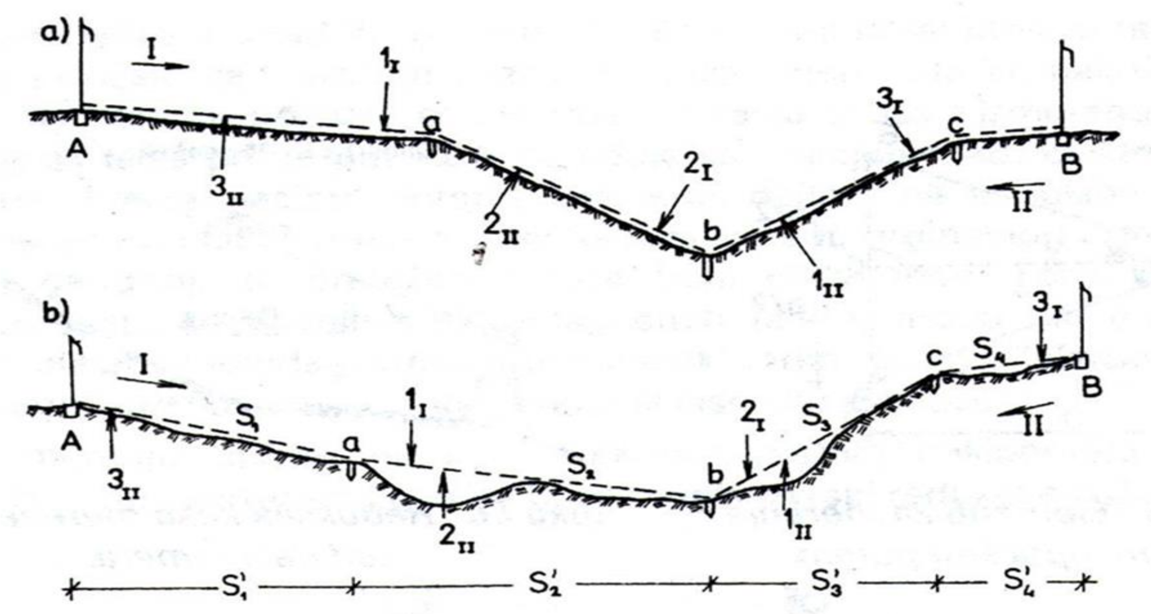
$$D_{hor} = \sqrt{D_{koso}^2 - \Delta H^2}$$

Ovo je tačna formula za računanje horizontalne dužine. Pored ove, u udžbenicima iz Geodezije se može pronaći i približna formula za računanje horizontalne dužine:

$$D_{hor} = D_{koso} - \frac{\Delta H^2}{2 * D_{koso}} - \frac{\Delta H^4}{8 * D_{koso}^3}$$

Kod približne formule, u većini slučajeva će treći član biti zanemarljive veličine.

Obično je, zbog neravnomjerne promjene nagiba terena, dužinu između tačaka potrebno podijeliti na nekoliko djelova u kojima je pad približno ravnomjeran (Slika 5).



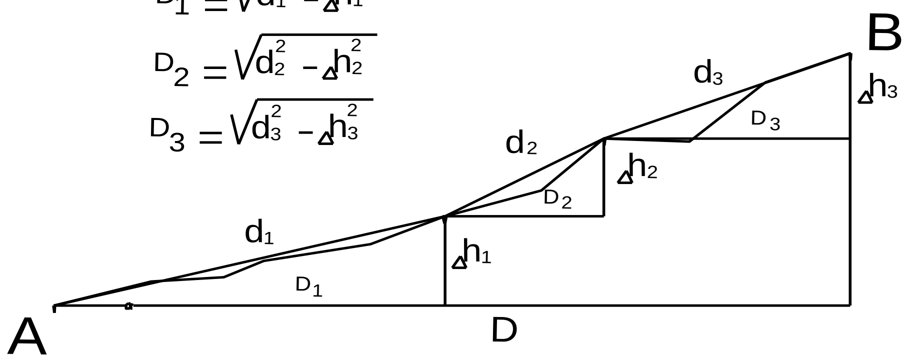
Slika 5. Mjerenje dužine na terenu sa prelomima

Ova rastojanja se moraju redukovati na horizontalnu odnosno projekcionu ravan, koja je poznata iz ranijih predavanja i u kojoj se pomoću koordinata opisuju prostorne forme. Da bi se redukovala dužina na horizont, neohodno je poznavati visinsku razliku između tačaka do kojih se mjeri dužina a često i do prelomnih tačaka u kojima se mijenja nagib terena koje se nalaze između krajnjih tačaka (Slika 6).

$$D_1 = \sqrt{d_1^2 - \Delta h_1^2}$$

$$D_2 = \sqrt{d_2^2 - \Delta h_2^2}$$

$$D_3 = \sqrt{d_3^2 - \Delta h_3^2}$$



$$D = D_1 + D_2 + D_3$$

Slika 6. Redukovanje kosih dužina u horizontalne

Kao što se sa slike vidi, ukupna horizontalna redukovana dužina jednaka je zbiru pojedinačnih redukovanih dužina. One se dobijaju po Pitagorinoj teoremi kao jedna od kateta gdje je druga kateta visinska razlika a hipotenuza kosa – mjerena dužina.

Mjerenje dužina pantljikom bio je veoma zamoran i dugotrajan posao, naročito kad se radilo o većem broju tačaka a skoro nemoguć u slučajevima kad je teren obrastao šibljem ili šumom. Pored toga, tako izmjerene dužine bile su male tačnosti a često su bile opterećene i grubim greškama, pa je mjerenje dužina u najvećoj mjeri izbjegavano i dužine određivane na indirektan način.

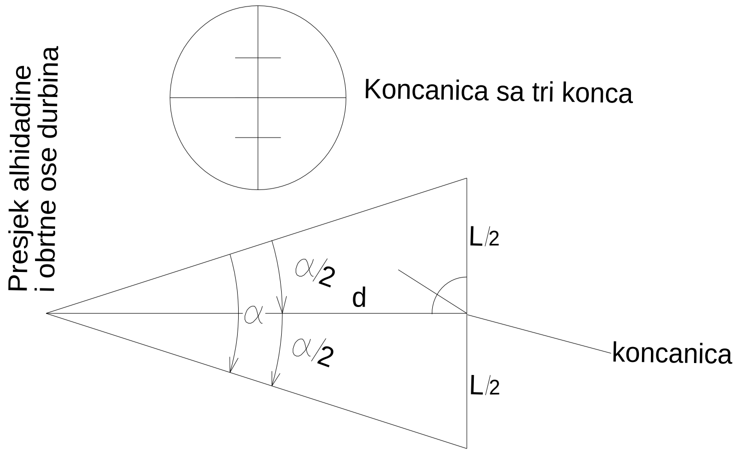
Tako je na primjer dužinu od 100 m, koja se nalazila na ravnom terenu, dakle u skoro idealnim uslovima, mjereći je u dva smjera, nije bilo moguće izmjeriti sa tačnošću većom od ± 5 cm. Međutim, dužinu od 100 m koja se nalazila na neravnom terenu, obraslom travom i sitnim rastinjem, mjereći je u dva smjera, nije bilo moguće izmjeriti sa tačnošću većom od ±15 cm.

Danas su još u upotrebi ručne pantljike, dok su poljske pantljike van upotrebe već duži niz godina. Ručne pantljike se naročito koriste kod izvođenja građevinskih objekata kao i u kontrolnim mjerenjima u geodeziji..

5.3 Optičko mjerenje dužina

Prva zamjena pantljike, pojavila se kada su konstruisani durbini teodolita osposobljeni končanicom, sa kojom se vršilo očitavanje odsječka na letvi. Ove specijalne letve su imale specijalnu podjelu nanešenu na njima i postavljale su se na tački do koje se od instrumenta određivalo rastojanje.

Princip koji je omogućio optičko mjerenje dužina je konstrukcija končanice sa tri konca i njeno postavljanje u durbinu instrumenta na konstantno rastojanje od alhidadine osovine, odnosno centra vertikalnog limba. Na ovaj način je ugao koji zaklapa vizura sa oba konca končanice konstantan i naziva se paralaktični ugao (α na Slici 7). Kada se končanica teodolita sastoji iz jedne (ili dvije) vertikalne crte i tri horizontalne crte, takav instrument se naziva Rajhenbahov daljinomer ili običan tahimetar.



Slika 7. Paralaktički ugao kod Rajhenbahovog daljinomjera

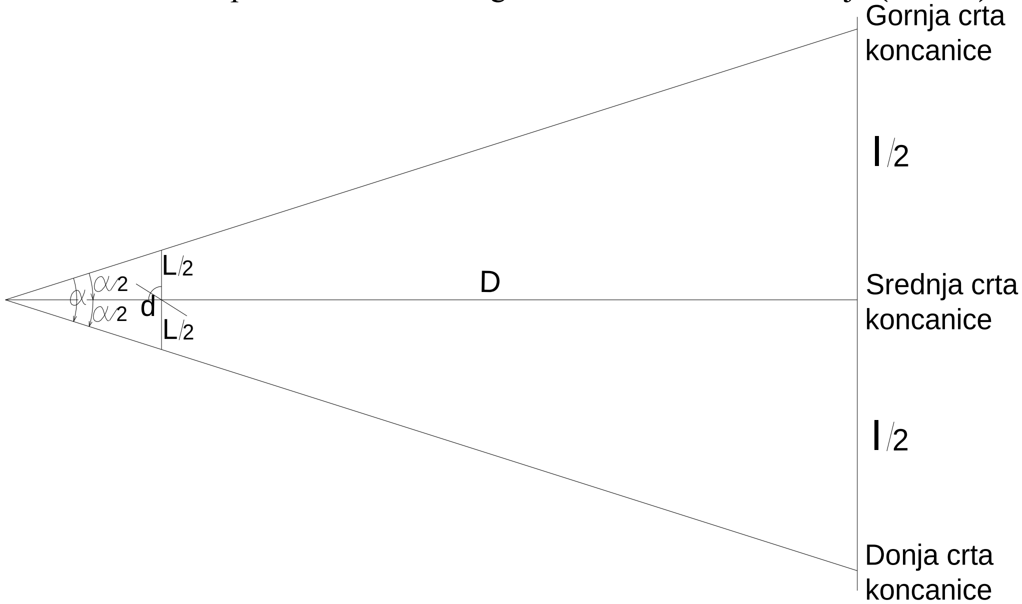
Sa slike se vidi da je:

$$tg\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{L}{2}}{d}$$

Pošto su α, d i L konstante veličline odavde se može izraziti konstanta k kao:

$$\frac{1}{2tg\frac{\alpha}{2}} = \frac{d}{L} = k$$

Konstanta k predstavlja konstantu paralaktičkog ugla. Poznavajući njenu vrijednost i očitavši sa dva konca podeoke na letvi mogla se sračunati dužina do nje (Slika 8).



Slika 8. Određivanje dužine preko konstante paralaktičkog ugla

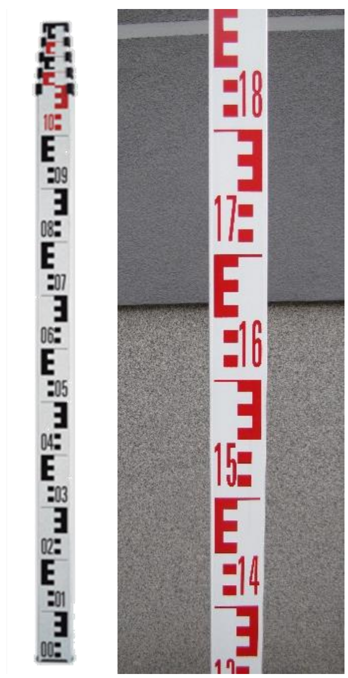
Ako sa l označimo čitanje na letvi, odnosno razliku između čitanja gornjom i donjom crtom končanice a sa D rastojanje od instrumenta do letve, onda se sa slike vidi da je:

$$tg\frac{\alpha}{2}=\frac{\frac{l}{2}}{D} \quad \text{Odakle je} \quad D=\frac{l}{2tg\frac{\alpha}{2}}$$

Za konstantu paralaktičkog ugla je već izvedeno da iznosi: $k=\dfrac{1}{2tg\frac{\alpha}{2}}$

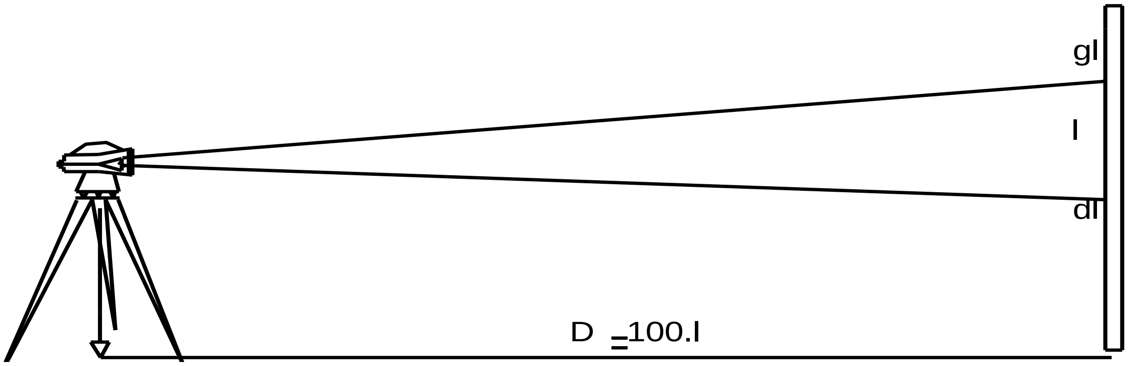
Odavde može izraziti tražena dužina: $D=k*l$.

Integracijom končanice sa tri konca u durbin teodolita, otvorila se mogućnost mjerenja rastojanja direktno od instrumenta do nekog vidljivog razmjernika postavljenog na tački do koje se dužina mjeri. Razmjernik koji se postavlja vertikalno na tački do koje se mjeri rastojanje zove se letva i izrađena je od drveta ili plastike, prosječne dužine do 2 m, širine 5 cm i debljine 1.5 cm, kod koje je na prednjoj strani izgravirana podjela do na cm (Slika 9). Ona na marginama ima označene brojeve decimetara od nule letve koja se postavlja na tačku do koje se mjeri rastojanje. Letva sa druge strane ima ugrađene držače i centričnu libelu za dovođenje u vertikalu. Čitanje podele letve se vrši pomoću crte končanice i to tako što se: čitaju decimetri, odbroje centimetri a unutar centimetara milimetri ocijene od oka.



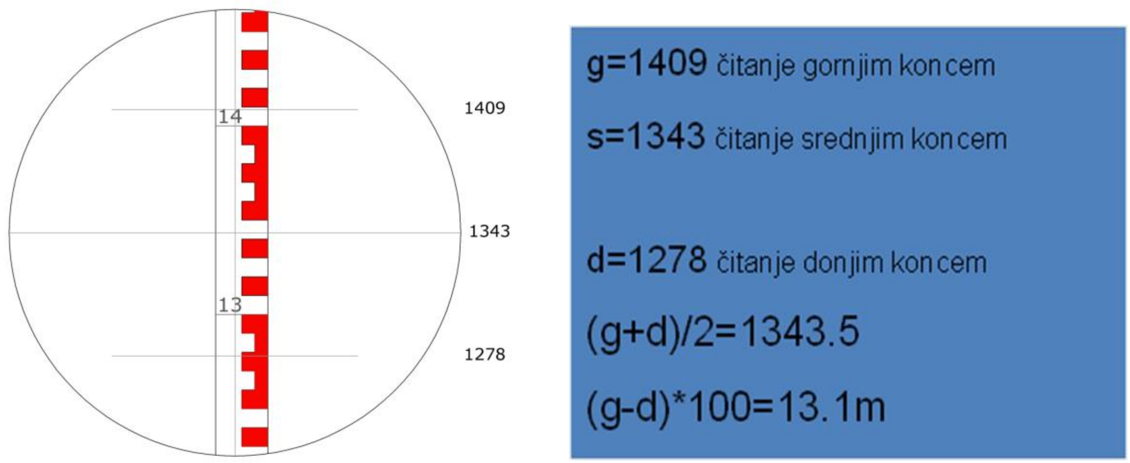
Slika 9. Izgled letve

Mjerenje se odvija tako, što se sa sva tri konca končanice očita letva i nađe razlika čitanja (Slika 10): $l=g-d$ gdje je g - čitanje letve gornim koncem, d - čitanje letve donjim koncem. Ovi instrumenti su konstruisani tako da je konstanta k ima okruglu vrijednost 100 pa se jednostavnim oduzimanjem gornjeg i donjeg odsječka na letvi i množenjem sa ovom konstantom, lako računa rastojanje.



Slika 10. Mjerenje rastojanja Rajhenbahovim daljinomjerom

Na Slici 11 prikazan je jedan primjer čitanja sa sračunatom dužinom. Dato je i čitanje letve srednjim koncem - s, koje služi za kontrolu.

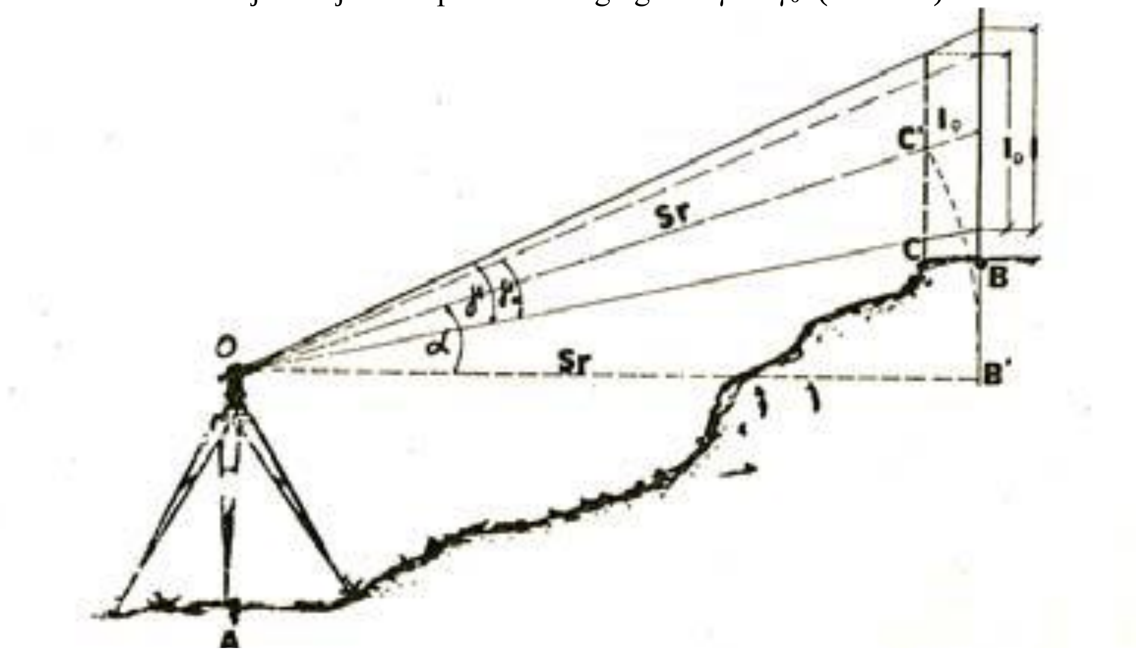


Slika 11. Čitanja na letvi Rajhenbahovim daljinomjerom

Instrumentom koji ima končanicu sa 3 konca, mogu se mjeriti kose dužine. Međutim, kako se koordinate tačaka računaju u projekcionoj ravni, neophodno je kose dužine redukovati na projekcionu odnosno horizontalnu ravan. Pored toga, za mjerenje visinskih razlika, koje su neophodne za prostornu projekciju odnosno izračunavanje nadmorske visine kao treće koordinate, neophodno je bilo mjeriti vertikalni ugao i onda izračunavati visinske razlike. Kod masovnih mjerenja, sve ovo je zahtijevalo veliki utrošak vremena, što je znatno usporavalo izradu podloga za projektovanje.

Tačnost ovako izmjerenog rastojanja od 100 m kretala se do ±15 cm pri čemu se kraće rastojanje mjerilo sa većom a duže rastojanje sa manjom tačnošću. Maksimalna tačnost optički određene dužine pomoću Rajhenbahovog daljinomera je 1 dm, jer greška procjene podjele letve od 1 mm pomnožena sa K=100, daje grešku dužine od 100 mm, odnosno 1 dm. Postojali su propisi koji su ovim načinom ograničavali mjerenje rastojanja do 120 m.

Poseban doprinos ubrzanju posla doprinijela je konstrukcija takozvanog autoredukcionog dijagrama koji se ugrađivao u končanicu durbina, tako da se na osnovu odsječka na letvi pomnoženog konstantom dobijala horizontalna dužina između instrumenta i letve. Pored toga, sa ovim dijagramom mogle su se odmah čitati i odsječci za visinsku razliku. Princip rada autoredukcionih daljinomjera se sastoji u tome da se povećanjem nagnutosti vizure (povećanjem vertikalnog ugla α) smanjuje paralaktički ugao. Odsječak l_0 koji odgovara redukovanoj dužini Sr se može pročitati na letvi u tački B ukoliko bi se smanjila vrijednost paralaktičkog ugla sa γ na γ_0 (Slika 12):



Slika 12. Princip autoredukcije

Da bi se ovo postiglo konstruisan je poseban dijagram (Hamer- Fenelov dijagram) koji nije simetričan u odnosu na glavni poluprečnik i u sebi ima nulti konac (vizura ide do njegovog presjeka sa vertikalnim koncem), konac za dužine i nekoliko konaca za visinske razlike sa odgovarajućim konstantama. Ovaj dijagram se crta uvećan, a potom smanjuje fotoputem i nanosi na prozračnu staklenu ploču koja se nalazi u vidnom polju durbina.

Na Slici 13 se vide izgled autoredukcionog dijagrama i primjer čitanja letve. Prvo što se uočava je da nula letve nije u podnožju nego je podignuta, najčešće na visinu od 1.4 m iz razloga da bi visina instrumenta bila takođe 1.4 m da bi se visinske razlike lakše računale. Čitanja na letvi se vrše presjekom konca za dužine i konca za visine sa vertikalnim koncem končanice koji pogađa letvu po sredini.

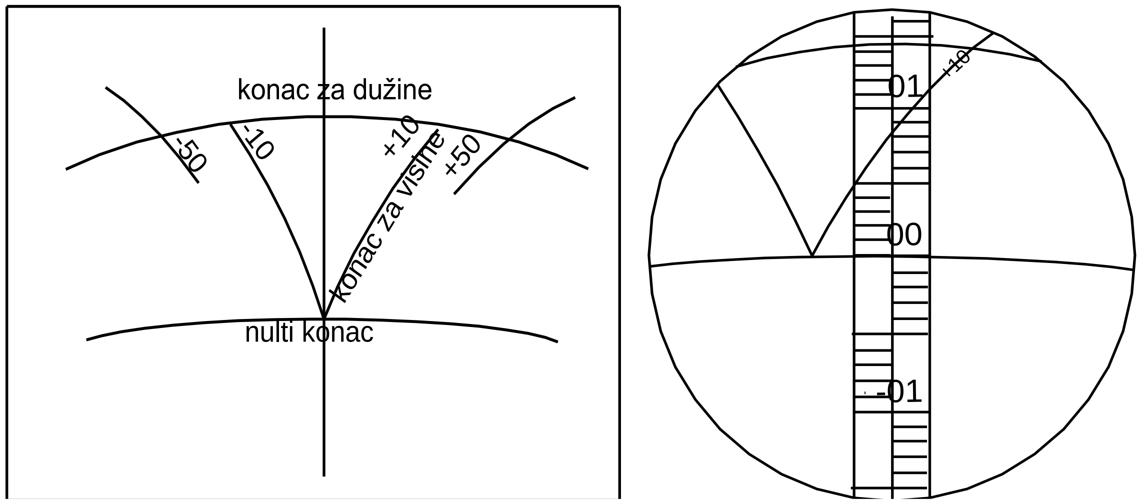
U konkretnom primjeru sa slike, konac za dužine pogađa letvu na 0.143 m (decimetri i centimetri se očitavaju a milimetri “cijene”). Konac za visine pogađa letvu na 0.083 m. Rastojanje od instrumenta se dobija kada se vrijednost čitanja konca za dužine pomnoži sa konstantom 100. Tako se u konkretnom slučaju dobija:

$$D = 0.143m * 100 = 14.3m$$

Visinska razlika se dobija kada se čitanje koncem za visinu pomnoži sa njegovom konstantom koja se vidi uz končanicu. U slučaju na slici ova konstanta ima vrijednost +10 pa će visinska razlika biti:

$$\Delta h = 0.083m * 10 = 0.83m$$

Tačnost izmjerenog rastojanja od 100 m kretala se u granicama tačnosti mjerenja končanicom sa tri konca, samo što se u slučaju autoredukcionog dijagrama direktno dobijala horizontalna dužina.



Slika 13. Autoredukcioni dijagram i primjer čitanja letve

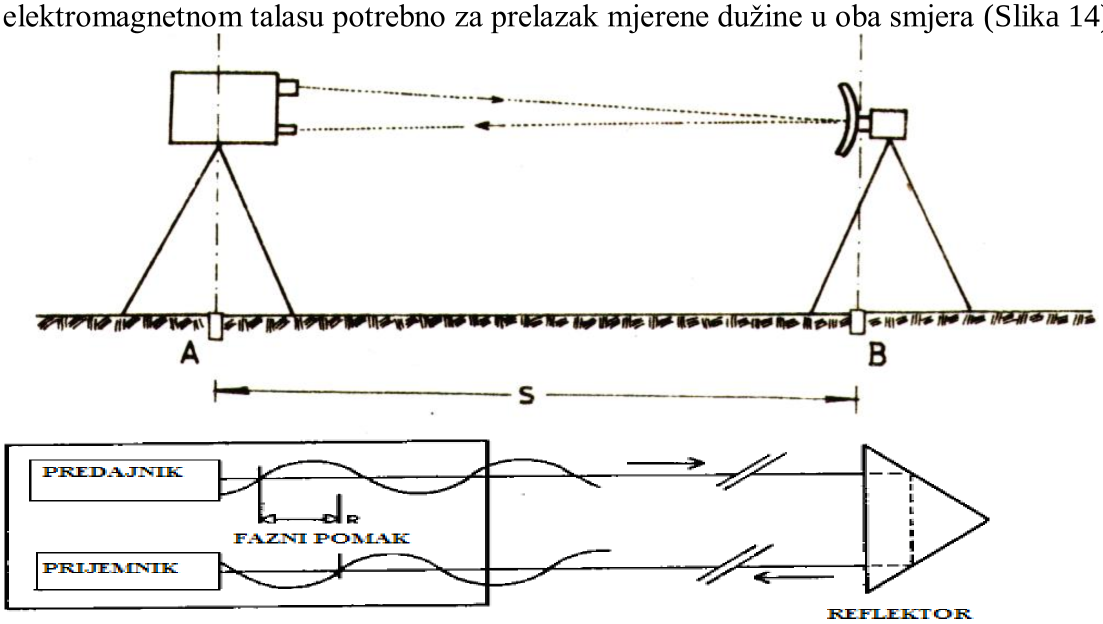
5.4 Elektromegnetno mjerenje dužina

Razvoj tehnike i tehnologije, posebno elektronike, doveli su do konstrukcije elektromagnetnih daljinomjera, koji koriste laserski zrak za veoma precizno mjerenje dužina.

Elektromagnetni daljinomeri se po principu određivanja dužina dijele na:

- Impulsne daljinomjere;
- Fazne daljinomjere;
- Radio daljinomjere;
- Elektrooptičke daljinomjere.

Princip elektronskog mjerenja dužina se zasniva na mjerenju vremena koje je elektromagnetnom talasu potrebno za prelazak mjerene dužine u oba smjera (Slika 14).



Slika 14. Princip elektronskog mjerenja dužina

Kod totalnih stanica je na durbin instrumenta integrisan emiter elektromagnetnih talasa, najčešće je to laserski zrak vidljive svjetlosti, koji se usmjerava na prizmu do koje se mjeri dužina i od prizme odbija i ponovo vraća do prijemne optike instrumenta koja se nalazi na durbinu neposredno pored emitera (Slika 15). Softver koji je sastavni dio instrumenta, odbrojava vrijeme koje elektromagnetni talas pređe od instrumenta do prizme i nazad i na indirektan način broji talasne dužine elektromagnetnog talasa koji množi sa njihovom frekvencijom i na ekranu pokazuje rastojanje od instrumenta do prizme.

Poznavajući vrijeme kada talasi napuste instrument i vrijeme kada se ponovo vrate u instrument, računa se mjerena dužina pomoću formule:

$$D = \frac{c * \Delta t}{2}$$

gdje je:

D - dužina između tačaka,

c – brzina elektromegnetnog talasa,

Δt – vrijeme koje je potrebno talasu da dva puta pređe mjerenu dužinu.

Brzina elektromagnetnog talasa jednaka je proizvodu njegove talasne dužine i frekvencije.

Slika 15. Savremeni elektromagnetni daljinomjeri i izgled prizme

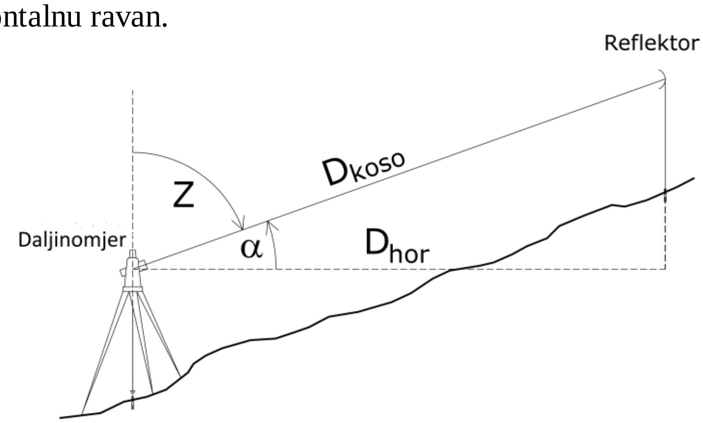
Na ovaj način se može mjeriti kosa i redukovana dužina. Kosa dužina se koristi za izračunavanje visinske razlike a horizontalna dužina za izračunavanje koordinata tačke X i Y u horizontalnoj ravni.

Elektromagnetni daljinomjer, pored mogućnosti digitalnog očitavanja dužine na ekranu monitora koji je sastavni dio instrumenta, ima mogućnost registrovanja i digitalnog očitavanja horizontalnog i vertikalnog ugla.

Kod savremenih elektromagnetnih daljinomjera (totalnih stanica) ugrađen je i softver koji na osnovu unesenih koordinata tačaka A i B i mjerenog ugla i dužine, izračunava koordinate Y i X tačke do koje se mjeri dužina, kao i nadmorsku visinu H. Ovi podaci se mogu vidjeti na displeju instrumenta, zapisani su u memoriji i jednostavno se mogu transportovati u računar.

Način izračunavanja koordinata i kota karakterističnih tačaka biće prikazan u narednim predavanjima.

Kod mjerenja dužina pomoću elektromagnetnog daljinomera, mjeri se dužina od prekreta durbina daljinomera, koji je na vertikali iznad jedne tačke (stanica), do centra reflektora, koji je na vertikali iznad druge tačke (vizurna tačka) (Slika 16). Ukoliko prekret durbina i centar reflektora nijesu na istoj nadmorskoj visini, na ovaj način se mjeri kosa dužina. S obzirom da je na daljinomeru ugrađen i vertikalni limb, za računanje horizontalnih dužina se pored mjerenja kose dužine D_{koso} izmjeri i zenitno odstojanje Z (ili vertikalni ugao α). Kako je već rečeno, u podlogama za projektovanje i u projektovanju koriste se dužine svedene na projekcionu ravan, odnosno kose dužine treba redukovati na horizontalnu ravan.



Slika 16. Kosa i redukovana dužina

Posmatrajući pravougli trougao sa slike u vertikalnoj ravni, koristeći trigonometrijske funkcije, horizontalna dužina se može sračunati kao:

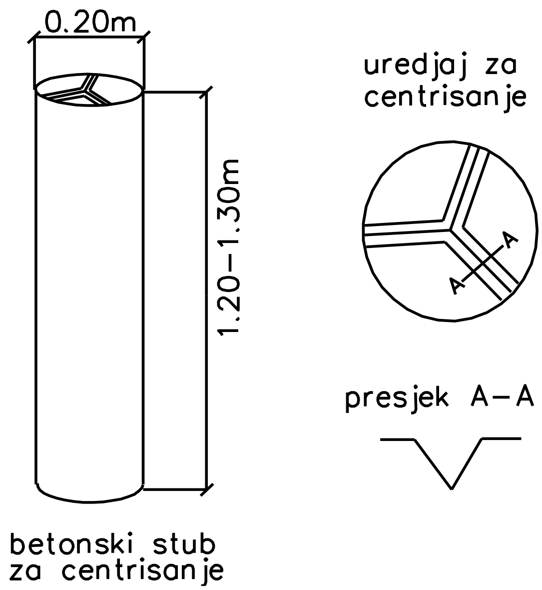
$D_{hor} = D_{koso} * \sin Z$ ili

$D_{hor} = D_{koso} * \cos \alpha$.

Tačnost izmjerenog rastojanja, osim od modela totalne koji imaju deklarisanu tačnost mjerenja dužine, u najvećem dijelu zavisti od tačnosti centrisanja instrumenta i prizme. Tako je dužinu od 100 m pomoću totalne stanice moguće izmjeriti sa tačnošću od ± 1 mm do ± 15 mm. Ako se totalna stanica centriše laserskim viskom i prizma centriše sa stativom, onda je moguće postići tačnost od ± 3 mm - 5 mm a ako se centriše optičkim viskom a prizma drži ručno, bez stativa onda se postiže tačnost od ± 10 mm - 15 mm.

Rastojanje od 100 i više metara može se sa totalnom stanicom izmjeriti i sa tačnošću od ± 1 mm - 2 mm, ali se tada instrument i prizma centrišu na posebnim stubovima sa ugrađenim uređajem za takozvano “prisilno centrisanje” (Slika 17). U ovom slučaju ne postoji greška centrisanja instrumenta i signala jer se oni nalaze uvijek na istom, fiksnom mjestu pa je ukupna greška jednaka deklarisanoj grešci modela totalne stanice kojom mjerimo dužinu.

Ova tačnost je potrebna kod mjerenja stabilnosti objekata u eksploataciji, kao što su mostovi, brane, stadioni, čelične konstrukcije itd.



Slika 17. Betonski stub sa uređajem za prisilno centrisanje

Masovnijom upotrebom elektromagnetnih daljinomera optički daljinomeri su skoro istisnuti iz upotrebe. Neke od prednosti ovakvog načina mjerenja dužina su:

- Visoka tačnost merenja;
- Moguće je mjeriti velika rastojanja (do nekoliko km);
- Brzo mjerenje (nekoliko sekundi);
- Očitavanje rezultata na displeju.

Kao što je rečeno, elektromagnetni daljinomeri su danas sastavni dio savremenih geodetskih instrumenata – totalnih geodetskih stanica, gdje postoji mogućnost automatske obrade mjerenja, registracije podataka, prenosa na računar itd.

Za mjerenje dimenzija unutrašnjosti objekata, koje je ranije vršeno sa mnogo komplikacija, pomoću ručnog metra, zvanog dvometar, ili ručne pantljike, danas se koriste mali ručni laserski daljinomjeri (“ručni laseri”) - Slika 18.

Slika 18. Ručni laseri

5.5 Određivanje dužina i uglova iz pomoćnog trougla - triangulacija

Do pojave elektromagnetnih daljinomjera, mjerenje dužina većih od 500 m, uglavnom je vršeno indirektnim putem, najčešće u oštrouglom trouglu. Poznato je da se oštrougli trogao može riješiti, ako su poznata dva ugla i jedna strana, ili ako su poznate dvije strane i zahvaćeni ugao ili ako su poznate sve tri strane. Pod pojmom "riješiti trougao" podrazumijeva se poznavanje sva tri ugla i sve tri dužine.

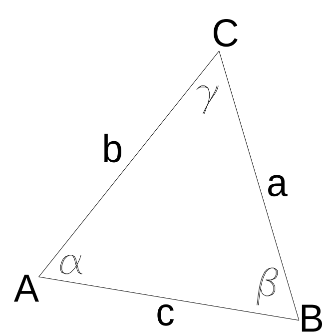
Ova dva zadnja slučaja u kojima je trebalo poznavati dužine, rijetko su korišćena, zato što dužine nije bilo lako mjeriti, pa je najčešće korišćen slučaj rješavanja trougla kad su poznata dva ugla i jedna dužina.

Danas se prilikom različitih geodetskih radova često javlja situacija da se potrebni ugao ili dužina ne mogu izmjeriti direktno na terenu, zbog toga što se tačke ne dogledaju ili nijesu pristupačne za postavljanje instrumenta ili signala. U takvim slučajevima se, radi određivanja potrebnih veličina, formiraju pomoćni trouglovi. U takvim trouglovima se mjere druge stranice ili uglovi, a potrebni uglovi ili dužine se dobijaju indirektno, računskim putem, računanjem nepoznatih elemenata u trouglu. Kod računanja nepoznatih elemenata u trouglovima važi generalno pravilo da je moguće pronaći nepoznate elemente (stranice ili uglove) u trouglu ukoliko je poznato (izmjereno) najmanje tri elementa, s tim da mora biti poznata najmanje jedna stranica trougla.

U narednom će biti dati različiti slučajevi "rješavanja trouglova".

Računanje nepoznatih elemenata u trouglu kada su dati dva ugla i stranica.

Na Slici 19 dat je izgled jednog oštrouglog trougla sa označenim stranicama i uglovima.



Slika 19. Računanje elemenata trougla - 1

U slučaju da su dati bilo koja dva ugla (α i β) i bilo koja stranica (a), prvo se računa vrijednost trećeg ugla. Nju dobijamo koristeći pravilo da je zbir unutrašnjih uglova u n-touglu jednak (n-2)*180° gdje je n broj stranica ili uglova. Tako će u slučaju trougla biti n=3 odnosno, suma unutrašnjih uglova u njemu treba da bude 180°.

Tako se dobija vrijednost ugla γ po formuli:

$$\gamma = 180° - \alpha - \beta$$

Za računanje nepoznatih stranica u ovom slučaju se može primijeniti sinusna teorema koja za ovako postavljene elemente trougla na slici glasi:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = m = 2R$$

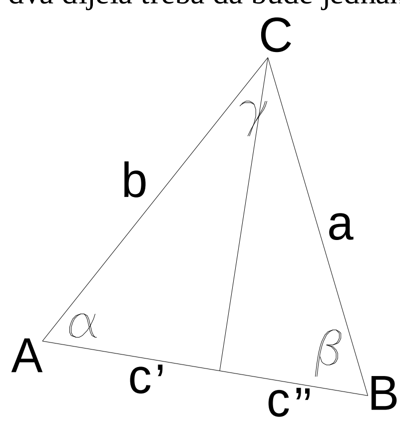
Dakle, sinusna teorema definiše da je odnos stranica i sinusa njima naspramnih uglova u trouglu konstantan. Pri tome je R poluprečnik opisanog kruga oko ovog trougla.

Iz date proporcije se mogu sračunati preostale dvije dužine preko formula:

$$b = \frac{a * \sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{c * \sin\beta}{\sin\gamma} \quad \text{i}$$

$$c = \frac{a * \sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{b * \sin\gamma}{\sin\beta}$$

Kontrola se vrši spuštanjem visine na stranicu c čime se stranica c dijeli na dva dijela c′ i c″(Slika 20). Zbir ta dva dijela treba da bude jednak stranici c = c′ + c″.



Slika 20. Kontrola računanja elemenata u oštrouglom trouglu

Kontrola sračunatih elemenata trougla se može izvršiti preko formule:

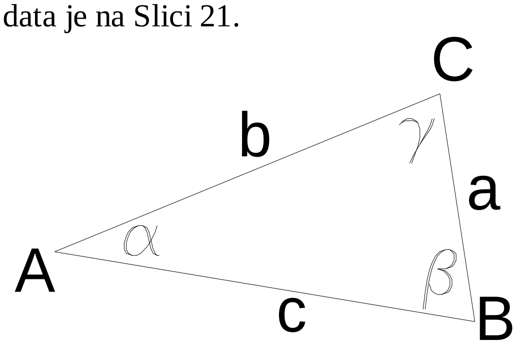
$$c = b * \cos\alpha + a * \cos\beta$$

Na ovaj način se može izvršiti kontrola sračunatih elemenata za sve dolje navedene primjere.

Računanje nepoznatih elemenata u trouglu kada su dati dvije stranice i ugao naspram jedne od njih.

Ovako dati elementi trougla daju se generalno mogu razložiti na dva slučaja:

I – kada su date bilo koje dvije stranice (a i b) i ugao naspram duže od njih (β). Ilustracija ovog trougla data je na Slici 21.



Slika 21. Računanje elemenata trougla – 2

U ovom slučaju postoji samo jedno rješenje za vrijednosti preostalih elemenata.
Za date elemente postavi se sinusna teorema:

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=m$$

Iz nje se može izraziti sinus ugla α kao:

$$\sin\alpha=\frac{a*\sin\beta}{b} \text{ odakle je } \alpha=\arcsin\frac{a*\sin\beta}{b}$$

Zatim se može sračunati vrijednost ugla β iz pravila da je zbir unutrašnih uglova u trouglu 180°:

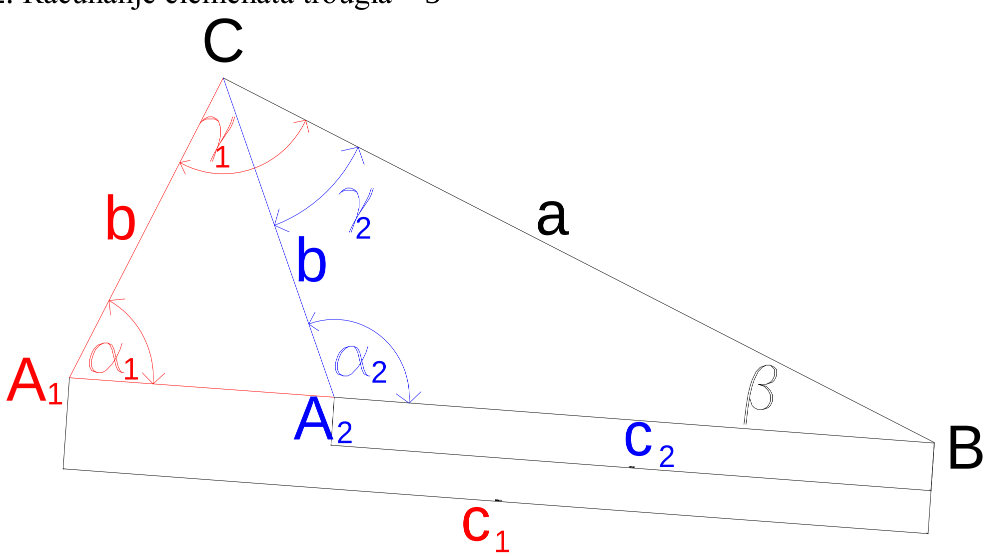
$$\gamma=180°-\alpha-\beta$$

I konačno stranica b:

$$b=\frac{a*\sin\beta}{\sin\alpha}=\frac{c*\sin\beta}{\sin\gamma}$$

II – kada su date bilo koje dvije stranice (a i b) i ugao naspram kraće od njih od njih (β). Ilustracija ovog trougla data je na Slici 22.

Slika 22. Računanje elemenata trougla – 3



Iz postavljene sinusne teoreme za ovaj trougao:

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=m$$

može se sračunati:

$$\sin\alpha=\frac{a*\sin\beta}{b}$$

sinα postoji samo ako je $a*\sin\beta\le b$ $(0\le\sin\alpha\le1)$.

Kada je zadat ugao naspram manje stranice mogući su sledeći odnosi:

1. $a*\sin\beta\langle b$. Tada postoje dva rješenja α_1 i α_2, pri čemu je $\alpha_1+\alpha_2=180°$.
2. $a*\sin\beta=b$. Tada je $\gamma=90°$.
3. $a*\sin\beta\rangle b$. Ovakav trougao je nemoguć (nema rješenje).

Ako važi prvi slučaj (sa dva rješenja) tada posmatramo trouglove ΔA_1BC i ΔA_2BC (Slika 22).

Napomena: Ukoliko postoji približna skica trougla iz nje se može zaključiti da li je α oštar ili tup ugao, odnosno koja se varijanta treba usvojiti.

Prvo rješenje ΔA_1BC :

$\sin\alpha_1 = \dfrac{a*\sin\beta}{b}$ odakle je $\alpha_1 = \arcsin\dfrac{a*\sin\beta}{b}$

Treći ugao se dobija: $\gamma_1 = 180° - \beta - \alpha_1$

Iz sinusne teoreme se dobija vrijednost stranice c_1:

$$c_1 = \frac{b*\sin\gamma_1}{\sin\beta}$$

Na Slici 22 ovo rješenje je naglašeno crvenom bojom (ugao α_1 – oštar ugao).

Drugo rješenje ΔA_2BC :

Iz $\alpha_1 + \alpha_2 = 180°$ slijedi da je $\alpha_2 = 180° - \alpha_1$

Treći ugao je:

$$\gamma_2 = 180° - \beta - \alpha_2$$

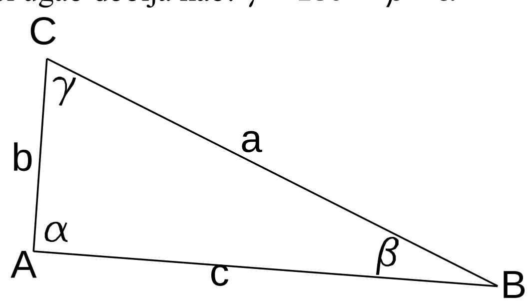
Iz sinusne teoreme dobija se vrijednost stranice c_2:

$$c_2 = \frac{b*\sin\gamma_2}{\sin\beta}$$

Na Slici 22 ovo rješenje je naglašeno plavom bojom (ugao α_2 – tup ugao).

Ako važi drugi slučaj (pravougli trougao – Slika 23), tada slijedi da je:

$\alpha = 90°$ pa se treći ugao dobija kao: $\gamma = 180° - \beta - \alpha$



Slika 23. Računanje elemenata trougla – 4

Iz sinusne teoreme se dobija vrijednost stranice c:

$\dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$ odakle je $c = \dfrac{b*\sin\gamma}{\sin\beta}$

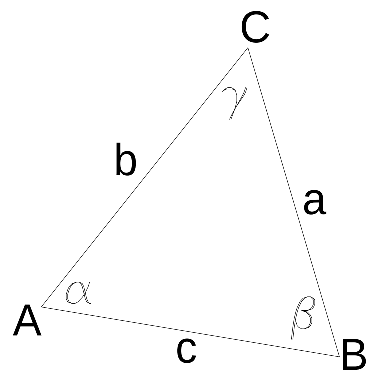
Odnosno iz Pitagorine teoreme:

$$c^2 = \sqrt{a^2 - b^2}$$

Napomena: Trougao sa više rješenja se u geodetskoj praksi izbjegava.

Računanje nepoznatih elemenata u trouglu kada su dati dvije stranice i ugao između njih.

U ovom slučaju nije moguće riješiti trougao preko sinusne teoreme već je to moguće preko tangensne teoreme, kosinusne teoreme ili diobom trougla na dva pravougla trougla. Ovdje će biti obrađeno rješenje trougla preko kosinusne teoreme.



Slika 24. Računanje elemenata trougla – 5

U trouglu sa Slike 24 date su dvije stranice (b i c) i ugao između njih - α.

Kosinusna teorema za ovako postavljene elemente glasi:
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$
Kosinusna teorema ima još dva pojavna oblika za preostale dvije stranice:
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$ i
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$.
Opšta definicija kosinusne teoreme glasi: Kvadrat nad stranicom trougla jednak je zbiru kvadrata preostale dvije stranice umanjenom za njihov dvostruki proizvod sa kosinusom njima zahvaćenog ugla.
U konkretnom slučaju se po kosinusnoj teoremi prvo računa vrijednost stranice a iz prvog njenog navedenog oblika:

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha}$$

Zatim se možemo vratiti na sinusnu teoremu:

$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = m$ odakle se može sračunati ugao β:

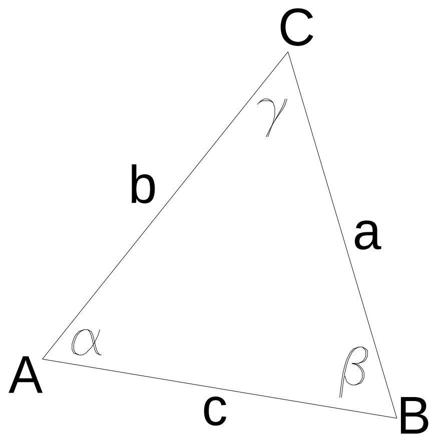
$\sin\beta = \frac{b*\sin\alpha}{a}$ odnosno $\beta = \arcsin\frac{b*\sin\alpha}{a}$.

I na kraju, poslednji ugao dobijamo preko:

$$\gamma = 180° - \alpha - \beta.$$

Računanje nepoznatih elemenata u trouglu kada su date sve tri stranice.

Rješenje ovog trogla biće dato preko kosinusne teoreme. U trouglu na Slici 25 date su vrijednosti sve tri stranice: a, b i c.



Slika 25. Računanje elemenata trougla – 6

Iz jednog od oblika kosinusne teoreme:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ može se izraziti vrijednost kosinusa ugla α:

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \text{ odakle je } \alpha = \arccos\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

Za računanje preostala dva ugla u trouglu vratićemo se sinusnoj teoremi:

$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = m$ odakle je:

$$\sin\beta = \frac{b * \sin\alpha}{a} \text{ odnosno } \beta = \arcsin\frac{b * \sin\alpha}{a}.$$

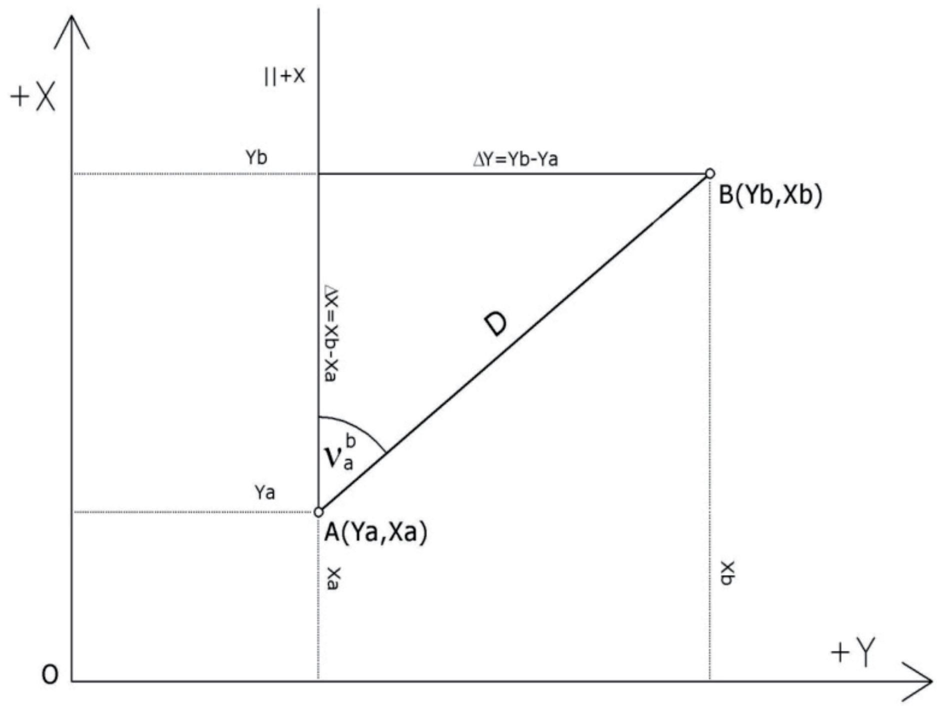
I na kraju, poslednji ugao dobijamo preko:

$$\gamma = 180° - \alpha - \beta.$$

Još jednom treba napomenuti da trougao u kome su date vrijednosti sva tri ugla nije moguće riješiti zbog nedefinisane razmjere.

5.6 Računanje dužine iz koordinata tačaka

Horizontalna dužina se između bilo koje dvije tačke može sračunati ukoliko su poznate njihove koordinate u bilo kom pravouglom koordinatnom sistemu (lokalni, državni) (Slika 26).



Slika 26. Računanje dužine i direkcionog ugla iz koordinata tačaka

Dužina se može dobiti iz sračunatih koordinatnih razlika iz Pitagorine teoreme po formuli:

$$D_{A-B} = \sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2}$$

Ukoliko je sračunat direkcioni ugao iz datih koordinata tačaka, tada se može izvršiti i kontrola računanja dužine.

Sa sike se vidi da je:

$$\sin \nu_A^B = \frac{\Delta Y}{D_{A-B}}$$

Odakle je :

$$D_{A-B} = \frac{\Delta Y}{\sin \nu_A^B}$$

Kontrola računanja dužine se može izvršiti i preko:

$$\cos \nu_A^B = \frac{\Delta X}{D_{A-B}}$$

odakle je:

$$D_{A-B} = \frac{\Delta X}{\cos \nu_A^B}.$$